Министерство сельского хозяйства РФ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Ч.III

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема III «ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА»

Методические указания

для самостоятельной работы обучающихся

по направлениям подготовки 38.03.02 «Менеджмент»,

38.03.04 «Государственное и муниципальное управление»

(уровень бакалавриата)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2016

УДК 378.147.88(076)

Семёнов Г.А. Математика. Ч.III Теория вероятностей. Тема III. «Дискретная случайная величина»: Методические указания для самостоятельной работы обучающихся по направлениям подготовки 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление» (уровень бакалавриата). – СПб: СПбГАУ, 2016 – 37 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор кафедры экономико-математических методов, статистики и информатики ФГБОУ ВО СПбГАУ **В.Г. Еникеев**;

кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО СПбГАУ **И.Н. Шоренко**

Методические указания предназначены для выполнения индивидуальных работ в рамках дисциплины «Математика» обучающимися по направлениям подготовки 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление» (уровень бакалавриата), также могут быть использованы в учебном процессе по другим направлениям подготовки бакалавриата.

Содержат подробное решение типовых практических заданий по основным разделам темы «Дискретная случайная величина»: нахождение закона распределения и функции распределения дискретной случайной величины, вычисление характеристик дискретной случайной величины.

Рекомендованы к публикации на электронном носителе для последующего размещения в электронной сети СПбГАУ, согласно соответствующему договору Учебно-методическим советом СПбГАУ (протокол № 7 от 28.04.2016 г.)

©Семёнов Г.А., 2016

©ФГБОУ ВО СПбГАУ, 2016

Введение

Третья часть «Теория вероятностей» настоящих методических указаний к заданиям для самостоятельной работы по дисциплине «Математика» содержит решение заданий разделов вузовского курса высшей математики в рамках дисциплин «Математика» и «Теория вероятностей». Тема «Дискретная случайная величина» включает в себя нахождение закона распределения и функции распределения дискретной случайной величины, вычисление характеристик дискретной случайной величины.

Издание содержит введение, две главы и список литературы.

Выполнение заданий для самостоятельной работы способствует формированию элементов следующих компетенций:

– ОК-7, ПК-10 направления 38.03.02 «Менеджмент»;

– ПК-6, ПК-7 направления 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление»;

Методические указания к заданиям для самостоятельной работы могут быть использованы студентами для решения практических заданий из соответствующего сборника по указанным темам в рамках дисциплин «Математика» и «Теория вероятностей».

1. Закон распределения дискретной случайной величины и её числовые характеристики

Для выполнения заданий данного раздела необходимо изучить следующие темы: «Понятие дискретной случайной величины», «Закон распределения дискретной случайной величины», «Ряд распределения дискретной случайной величины», «Многоугольник распределения дискретной случайной величины», «Числовые характеристики дискретной случайной величины».

1.1. Задан закон распределения случайной величины:

x_i	-3	-1	1	4	7
p_i	0,1	0,2	?	0,1	0,3

а) найти неизвестное значение вероятности;

б) построить многоугольник распределения;

в) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

г) найти характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение

а) Сумма всех значений вероятностей, соответствующих значениям случайной величины X, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

В данном случае

$$0{,}1 + 0{,}2 + p_3 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1,$$

откуда неизвестное значение вероятности p_3:

$$p_3 = 1 - 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}1 - 0{,}3 = 0{,}3.$$

Запишем закон распределения случайной величины X с учётом полученного значения p_3:

x_i	-3	-1	1	4	7
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

б) Для построения многоугольника распределения рассмотрим декартову систему координат, в которой по оси абсцисс будем откладывать возможные значения случайной величины ***X***, а по оси ординат – соответствующие значения вероятности. В этой системе координат построим точки с координатами (x_i, p_i) и соединим их ломаной линией. Для рассматриваемого примера многоугольник распределения приведён на рисунке 1:

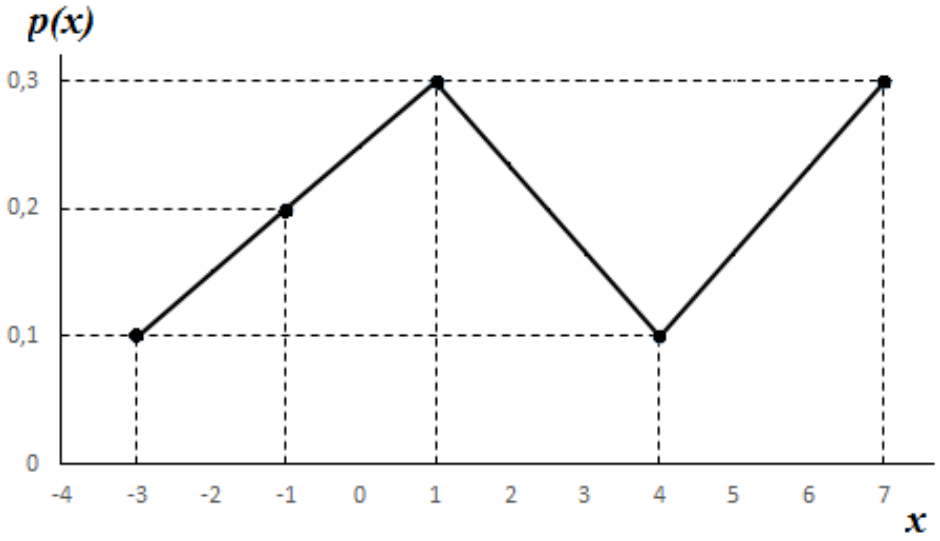


Рисунок 1. Многоугольник распределения случайной величины ***X***

в) Функция распределения ***F(x)*** случайной величины ***X*** определяется равенством:

$$F(x) = P(X < x),$$

то есть для каждого значения ***x*** соответствующее значение ***F(x)*** – это вероятность того, что значение случайной величины ***X*** окажется меньше, чем ***x***.

Для дискретной случайной величины функция распределения равна сумме вероятностей для тех возможных значений случайной величины, которые меньше ***x***:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \ .$$

Тогда

1) при $x \le -3$

$F(x) = 0$,

т.к. нет ни одного возможного значения, которое будет меньше ***x***;

2) при $-3 < x \le -1$

$F(x) = P(X = -3) = 0{,}1$,

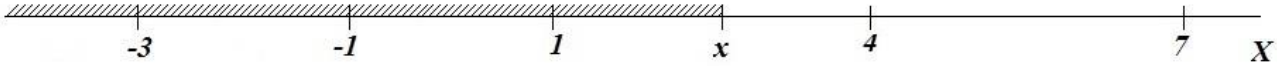
т.к. есть только одно возможное значение, которое меньше ***x***;

3) при $-1 < x \le 1$

$F(x) = P(X = -3) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

т.к. существует два возможных значения, которые меньше ***x***;

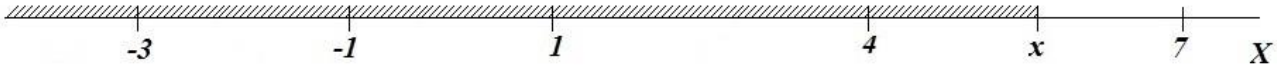
4) при $1 < x \le 4$



$F(x) = P(X = -3) + P(X = -1) + P(X = 1) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$;

т.к. существует три возможных значения, которые меньше ***x***;

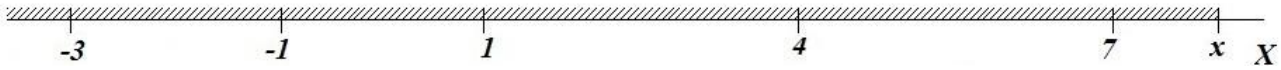
5) при $4 < x \le 7$



$F(x) = P(X = -3) + P(X = -1) + P(X = 1) + P(X = 4) =$
$0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}7$;

т.к. существует четыре возможных значения, которые меньше ***x***;

6) при $x > 7$



$$F(x) = P(X = -3) + P(X = -1) + P(X = 1) + P(X = 4) + P(X + 7) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1{,}0$$

т.к. все пять возможных значений случайной величины меньше ***x***.

Таким образом, значения функции ***F(x)*** на интервалах между возможными значениями (x_i, x_{i+1}) не меняются, а в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины ***F(x)*** имеет разрывы первого рода (скачки), величина скачка равна вероятности соответствующего значения ***X***:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ 0{,}1, & -3 < x \le -1 \\ 0{,}3, & -1 < x \le 1 \\ 0{,}6 & 1 < x \le 4 \\ 0{,}7 & 4 < x \le 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$$

График функции распределения ***F(x)*** приведён на рисунке 2:

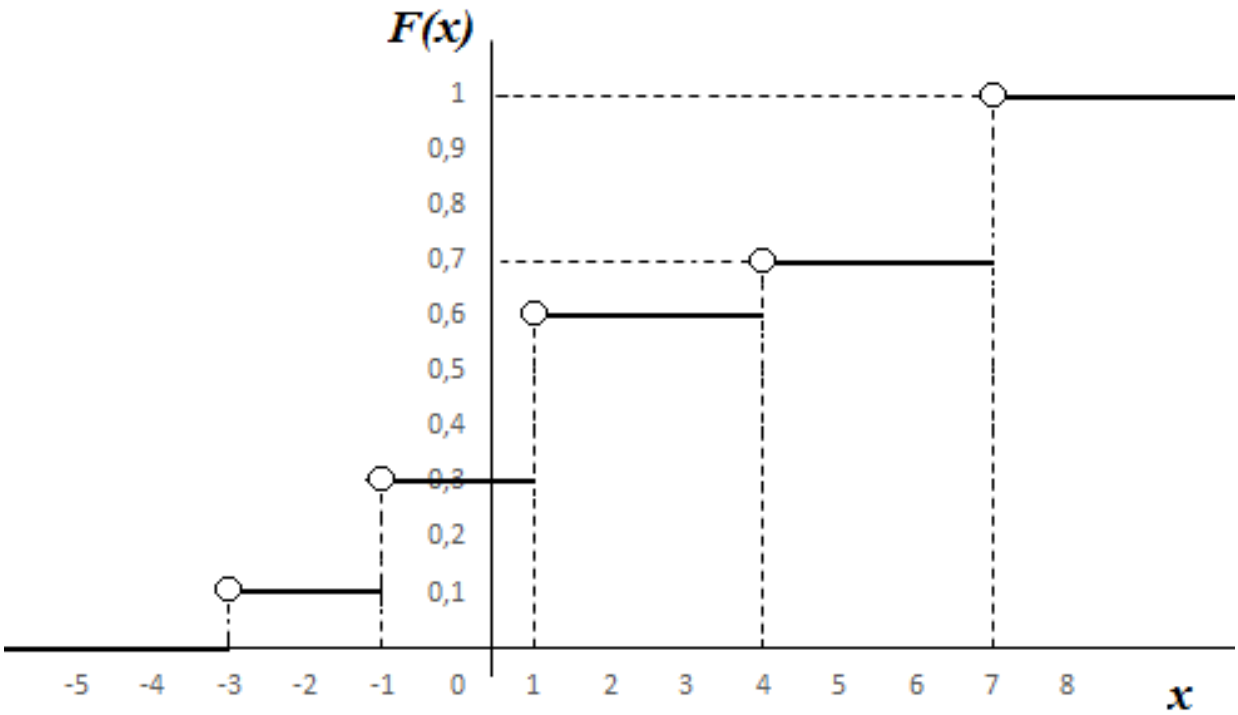


Рисунок 2. График функции распределения случайной величины ***X***

В каждой точке разрыва функция распределения непрерывна слева.

г) Математическое ожидание ***M(X)*** равно сумме произведений значений случайной величины на соответствующие им значения вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ .$$

В рассматриваемом примере:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i = -3 \cdot 0{,}1 + (-1) \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}3 = 2{,}3 .$$

Математическое ожидание также называют средним значением случайной величины. Размерность характеристики ***M(X)*** совпадает с размерностью величины ***X***.

Дисперсия ***D(X)*** случайной величины равна математическому ожиданию квадрата её отклонения от среднего значения ***M(X)***, т.е.

$$D(X) = M(X - M(X))^2 .$$

Дисперсию ***D(X)*** можно найти как сумму произведений квадратов отклонений значений случайной величины от значения математического ожидания ***M(X)*** и соответствующих значений вероятности:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i \ .$$

В рассматриваемом примере

$$D(X) = \sum_{i=1}^{5} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i = (-3 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}1 + (-1 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ (1 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (4 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}1 + (7 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 = 12{,}41.$$

Для вычисления дисперсии можно использовать и другую формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 ,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i \ .$$

В рассматриваемом примере

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot p_i = (-3)^2 \cdot 0{,}1 + (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 7^2 \cdot 0{,}3 = 17{,}7;$$

$$D(X) = 17{,}7 - (2{,}3)^2 = 12{,}41.$$

Размерность характеристики ***D(X)*** равна квадрату размерности величины ***X***.

Среднее квадратическое отклонение ***σ(X)*** случайной величины равно квадратному корню из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

то есть

$$\sigma(X) = \sqrt{12{,}41} \approx 3{,}53.$$

Размерность характеристики ***σ(X)*** совпадает с размерностью величины ***X***.

1.2. Известны законы распределения независимых случайных величин *X* и *Y*:

x_i	1	5
p_i	0,7	0,3

y_i	2	4	6
p_i	0,2	0,3	0,5

Найти:

а) ***M(X)***, ***D(X)***, ***σ(X)***; **б)** ***M(Y)***, ***D(Y)***, ***σ(Y)***;

в) закон распределения величины ***X+Y***;

г) ***M(X+Y)***, ***D(X+Y)***, ***σ(X+Y)***;

д) закон распределения величины ***X–Y***;

е) ***M(X–Y)***, ***D(X–Y)***, ***σ(X–Y)***;

ё) закон распределения величины ***X·Y***;

ж) ***M(X·Y)***, ***D(X·Y)***, ***σ(X·Y)***.

Решение

а) По методике, приведённой в разделе **1.1. г)**, находим числовые характеристики ***M(X)***, ***D(X)***, ***σ(X)***. Математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}7 + 5 \cdot 0{,}3 = 2{,}2 .$$

Дисперсия:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{2} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i = (1-2{,}2)^2 \cdot 0{,}7 + (5-2{,}2)^2 \cdot 0{,}3 = 3{,}36 .$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}36} \approx 1{,}83 .$$

б) Аналогично находим характеристики случайной величины ***Y***:

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{3} y_j \cdot p_j = 2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}5=4{,}6\,;$$

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{3}[y_j - M(Y)]^2 \cdot p_j = (2-4{,}6)^2\cdot 0{,}2+(4-4{,}6)^2\cdot 0{,}3+$$

$$+(6-4{,}6)^2\cdot 0{,}5=2{,}44\,;$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{2{,}44}\approx 1{,}56.$$

в) Для построения закона распределения случайной величины ***X+Y*** нужно найти все её возможные значения и соответствующие вероятности. Рассмотрим всевозможные пары значений $(x_i;\ y_j)$ случайных величин ***X*** и ***Y***, вычисляя их сумму и вероятность того, что одновременно случайная величина **X** примет значение x_i, а случайная величина ***Y*** примет значение y_i,. Если возможные значения случайной величины ***X+Y*** получены при нескольких вариантах значений случайных величин ***X*** и ***Y***, то вероятность этих вариантов нужно сложить.

В рассматриваемом примере:

$$1)\ x_1+y_1=1+2=3;$$
$$2)\ x_1+y_2=1+4=5;$$
$$3)\ x_1+y_3=1+6=7;$$
$$4)\ x_2+y_1=5+2=7;$$
$$5)\ x_2+y_2=5+4=9;$$
$$6)\ x_2+y_3=5+6=11.$$

В силу независимости случайных величин ***X*** и ***Y*** значения вероятности:

$$1)\ P(X=x_1;Y=y_1)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_1)=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14;$$
$$2)\ P(X=x_1;Y=y_2)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_2)=0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}21;$$
$$3)\ P(X=x_1;Y=y_3)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_3)=0{,}7\cdot 0{,}5=0{,}35;$$
$$4)\ P(X=x_2;Y=y_1)=P(X=x_2)\cdot P(Y=y_1)=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06;$$
$$5)\ P(X=x_2;Y=y_2)=P(X=x_2)\cdot P(Y=y_2)=0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}09;$$

$$6)\ P(X = x_2; Y = y_3) = P(X = x_2) \cdot P(Y = y_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15.$$

Из приведённых вычислений видно, что возможные значения случайной величины ***X+Y***: ***3, 5 7, 9, 11***. В данном случае равными оказались значения (x_1+y_3) и (x_2+y_1), следовательно значению ***X+Y=7*** соответствует сумма вероятностей $P(X=x_1; Y=y_3)$ и $P(X=x_2; Y=y_1)$. Таким образом, закон распределения (ряд распределения) величины ***X+Y*** имеет вид:

X+Y	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*
P	*0,14*	*0,21*	*0,41*	*0,09*	*0,15*

Для проверки результата найдём сумму вероятностей всех возможных значений случайной величины ***X+Y***. Она должна быть равна единице:

$$\sum_{k=1}^{5} p_k = 0{,}14 + 0{,}21 + 0{,}41 + 0{,}09 + 0{,}15 = 1{,}00.$$

г) По найденному ряду распределения случайной величины ***X+Y*** находим её математическое ожидание:

$$M(X+Y) = \sum_{k=1}^{5} (x+y)_k \cdot p_k = 3 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}21 + 7 \cdot 0{,}41 + 9 \cdot 0{,}09 + 11 \cdot 0{,}15 = 6{,}8.$$

С другой стороны, по свойству математического ожидания для суммы случайных величин:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y),$$

подставляя найденные ранее в разделах **а)** и **б)** значения ***M(X)*** и ***M(Y)***, получим то же самое значение:

$$M(X+Y) = 2{,}2 + 4{,}6 = 6{,}8.$$

По ряду распределения с учётом найденного значения ***M(X+Y)*** находим дисперсию случайной величины ***X+Y***:

$$D(X+Y)=\sum_{k=1}^{5}[(x+y)_k-M(X+Y)]^2\cdot p_k=(3-6{,}8)^2\cdot 0{,}14+(5-6{,}8)^2\cdot$$
$$\cdot 0{,}21+(7-6{,}8)^2\cdot 0{,}41+(9-6{,}8)^2\cdot 0{,}09+(11-6{,}8)^2\cdot 0{,}15=5{,}8.$$

То же значение можно получить с использованием свойства дисперсии суммы случайных величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=3{,}36+2{,}44=5{,}8\,.$$

Среднее квадратическое отклонение находим как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{D(X+Y)}=\sqrt{5{,}8}\approx 2{,}41.$$

д) Чтобы найти закон распределения случайной величины ***X–Y***, необходимо для всех возможных пар значений $(x_i;\ y_j)$ найти их разность и вероятность того, что одновременно величина ***X*** примет значение x_i, а величина ***Y*** примет значение y_j. В рассматриваемом случае

$$1)\ x_1-y_1=1-2=-1;$$
$$2)\ x_1-y_2=1-4=-3;$$
$$3)\ x_1-y_3=1-6=-5;$$
$$4)\ x_2-y_1=5-2=3;$$
$$5)\ x_2-y_2=5-4=1;$$
$$6)\ x_2-y_3=5-6=-1.$$

Значения вероятности:

$$1)\ P(X=x_1;Y=y_1)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_1)=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14;$$
$$2)\ P(X=x_1;Y=y_2)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_2)=0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}21;$$
$$3)\ P(X=x_1;Y=y_3)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_3)=0{,}7\cdot 0{,}5=0{,}35;$$
$$4)\ P(X=x_2;Y=y_1)=P(X=x_2)\cdot P(Y=y_1)=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06;$$
$$5)\ P(X=x_2;Y=y_2)=P(X=x_2)\cdot P(Y=y_2)=0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}09;$$
$$6)\ P(X=x_2;Y=y_3)=P(X=x_2)\cdot P(Y=y_3)=0{,}3\cdot 0{,}5=0{,}15.$$

С учётом того, что возможное значение ***–1*** может быть получено двумя способами, закон распределения (ряд распределения) величины ***X–Y*** будет

иметь вид:

X–Y	*-5*	*-3*	*-1*	*1*	*3*
P	*0,35*	*0,21*	*0,29*	*0,09*	*0,06*

Сумма вероятностей всех значений случайной величины ***X–Y*** равна единице:

$$\sum_{k=1}^{5} p_k = 0{,}35 + 0{,}21 + 0{,}29 + 0{,}09 + 0{,}06 = 1{,}00.$$

е) По ряду распределения случайной величины ***X–Y*** находим её математическое ожидание:

$$M(X-Y) = \sum_{k=1}^{5} (x-y)_k \cdot p_k = -5 \cdot 0{,}35 + (-3) \cdot 0{,}21 + (-1) \cdot 0{,}29 +$$
$$+1 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}06 = -2{,}4;$$

и по свойству математического ожидания для суммы случайных величин:

$$M(X-Y) = 2{,}2 - 4{,}6 = -2{,}4.$$

С учётом значения ***M(X–Y)*** находим дисперсию величины ***X–Y***:

$$D(X-Y) = \sum_{k=1}^{5} [(x-y)_k - M(X-Y)]^2 \cdot p_k =$$
$$(-5-(-2{,}4))^2 \cdot 0{,}35 + (-3-(-2{,}4))^2 \cdot 0{,}21 + (-1-(-2{,}4))^2 \cdot 0{,}29 +$$
$$+(1-(-2{,}4))^2 \cdot 0{,}09 + (3-(-2{,}4))^2 \cdot 0{,}06 = 5{,}8.$$

С другой стороны, по свойству дисперсия разности случайных величин равна сумме их дисперсий.

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y),$$

то есть

$$D(X-Y) = D(X+Y) = 3{,}36 + 2{,}44 = 5{,}8$$

– получили тот же самый результат, что и при вычислении дисперсии по ряду

распределения случайной величины ***X–Y***. Ещё раз отметим, что дисперсия разности случайных величин равна их сумме.

Среднее квадратическое отклонение находим как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X-Y)=\sqrt{D(X-Y)}=\sqrt{5{,}8}\approx 2{,}41.$$

ё) Для всех возможных пар значений $(x_i;\ y_j)$ находим их произведение и вероятность того, что одновременно величина ***X*** примет значение x_i, а величина ***Y*** примет значение y_j:

$$1)\ x_1\cdot y_1=1\cdot 2=2;$$
$$2)\ x_1\cdot y_2=1\cdot 4=4;$$
$$3)\ x_1\cdot y_3=1\cdot 6=6;$$
$$4)\ x_2\cdot y_1=5\cdot 2=10;$$
$$5)\ x_2\cdot y_2=5\cdot 4=20;$$
$$6)\ x_2\cdot y_3=5\cdot 6=30.$$

Значения вероятности:

$$1)\ P(X=x_1;Y=y_1)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_1)=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14;$$
$$2)\ P(X=x_1;Y=y_2)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_2)=0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}21;$$
$$3)\ P(X=x_1;Y=y_3)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_3)=0{,}7\cdot 0{,}5=0{,}35;$$
$$4)\ P(X=x_2;Y=y_1)=P(X=x_2)\cdot P(Y=y_1)=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06;$$
$$5)\ P(X=x_2;Y=y_2)=P(X=x_2)\cdot P(Y=y_2)=0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}09;$$
$$6)\ P(X=x_2;Y=y_3)=P(X=x_2)\cdot P(Y=y_3)=0{,}3\cdot 0{,}5=0{,}15.$$

Запишем ряд распределения случайной величины ***X·Y***:

X·Y	*2*	*4*	*6*	*10*	*20*	*30*
P	*0,14*	*0,21*	*0,35*	*0,06*	*0,09*	*0,15*

Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины ***X·Y*** равна единице:

$$\sum_{k=1}^{6} p_k = 0{,}14 + 0{,}21 + 0{,}35 + 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}15 = 1{,}00.$$

ж) По ряду распределения величины ***X·Y*** находим математическое ожидание:

$$M(X \cdot Y) = \sum_{k=1}^{6} (x \cdot y)_k \cdot p_k = 2 \cdot 0{,}14 + 4 \cdot 0{,}21 + 6 \cdot 0{,}35 +$$
$$+ 10 \cdot 0{,}06 + 20 \cdot 0{,}09 + 30 \cdot 0{,}15 = 10{,}12.$$

По свойству математического ожидания для произведения независимых случайных величин:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) = 2{,}2 \cdot 4{,}6 = 10{,}12.$$

Дисперсия величины ***X·Y***:

$$D(X \cdot Y) = \sum_{k=1}^{6} [(x \cdot y)_k - M(X \cdot Y)]^2 \cdot p_k =$$
$$(2 - 10{,}12)^2 \cdot 0{,}14 + (4 - 10{,}12)^2 \cdot 0{,}21 + (6 - 10{,}12)^2 \cdot 0{,}35 +$$
$$+ (10 - 10{,}12)^2 \cdot 0{,}06 + (20 - 10{,}12)^2 \cdot 0{,}09 + (30 - 10{,}12)^2 \cdot 0{,}15 = 91{,}1056.$$

С другой стороны, можно воспользоваться формулой для дисперсии произведения независимых случайных величин:

$$D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y) + M^2(X) \cdot D(Y) + M^2(Y) \cdot D(X).$$

Тогда

$$D(X \cdot Y) = 3{,}36 \cdot 2{,}44 + (2{,}2)^2 \cdot 2{,}44 + (4{,}6)^2 \cdot 3{,}36 = 91{,}1056\,.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X \cdot Y) = \sqrt{D(X \cdot Y)} = \sqrt{91{,}1056} \approx 9{,}55.$$

1.3. Задана функция распределения *F(x)* случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ 0{,}1, & 3<x\le 5;\\ 0{,}3, & 5<x\le 6;\\ 0{,}7, & 6<x\le 8;\\ 1, & x>8.\end{cases}$$

Найти:

а) Ряд распределения случайной величины ***X***;

б) Характеристики ***M(X)***, ***D(X)***, ***σ(X).***

Решение

а) Видно, что функция распределения ***F(x)*** терпит разрывы в точках:

$$x_1=3;$$
$$x_2=5;$$
$$x_3=6;$$
$$x_4=8.$$

Эти точки соответствуют возможным значениям случайной величины ***X***.

Соответствующие значения вероятности при этом равны величинам скачков функции распределения в точках разрыва, то есть

$$P(X=x_1)=F_2-F_1=0{,}1-0=0{,}1;$$
$$P(X=x_2)=F_3-F_2=0{,}3-0{,}1=0{,}2;$$
$$P(X=x_3)=F_4-F_3=0{,}7-0{,}3=0{,}4;$$
$$P(X=x_4)=F_5-F_1=1-0{,}7=0{,}3.$$

где $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, **…**, $\boldsymbol{F_5}$ – значения функции распределения в пяти промежутках. Таким образом, ряд распределения случайной величины ***X*** имеет вид:

$\boldsymbol{x_i}$	*3*	*5*	*6*	*8*
$\boldsymbol{p_i}$	*0,1*	*0,2*	*0,4*	*0,3*

б) Характеристики ***M(X)***, ***D(X)***, ***σ(X)*** находим аналогично предыдущим заданиям. Математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = 3\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}4+8\cdot 0{,}3=6{,}1.$$

Дисперсия:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{4}[x_i - M(X)]^2 \cdot p_i = (3-6{,}1)^2\cdot 0{,}1+(5-6{,}1)^2\cdot 0{,}2+(6-6{,}1)^2\cdot 0{,}4+$$
$$+(8-6{,}1)^2\cdot 0{,}3=2{,}29.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2{,}29}\approx 1{,}51.$$

2.1. Виды распределения дискретной случайной величины и их числовые характеристики

Для выполнения заданий данного раздела необходимо изучить следующие темы: «Вероятность суммы несовместных событий», «Вероятность произведения независимых событий», «Закон распределения дискретной случайной величины», «Ряд распределения дискретной случайной величины», «Числовые характеристики дискретной случайной величины», «Основные законы распределения дискретных случайных величин».

2.1. Найти ряд распределения, математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратическое отклонение *σ(X)* случайной величины *X*:

Каждый из трёх стрелков один раз стреляет по мишени. Вероятности попадания для первого, второго и третьего стрелка соответственно равны $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}6$, $p_3 = 0{,}2$. X – общее число попаданий.

Решение

Рассмотрим события:

A_1 = {Первый стрелок попадёт по мишени};

A_2 = {Второй стрелок попадёт по мишени};

A_3 = {Третий стрелок попадёт по мишени}.

События A_1, A_2, A_3 являются независимыми (так как попадание или промах одного стрелка не влияет на результат других). Их вероятности:

$$P(A_1) = p_1 = 0{,}8;$$
$$P(A_2) = p_2 = 0{,}6;$$
$$P(A_3) = p_3 = 0{,}2.$$

Вероятности соответствующих противоположных событий (промахов):

$$P(\overline{A_1}) = q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$
$$P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$

$$P(\overline{A_3}) = q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – общее число попаданий – может принимать следующие значения:

$\boldsymbol{X} = 0$ – все три события $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$ – не наступили, т.е. все три стрелка промахнулись;

$\boldsymbol{X} = 1$ – наступило ровно одно событие из $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, т.е. в мишень попал только один стрелок (какой – не важно);

$\boldsymbol{X} = 2$ – наступило ровно два события из $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, т.е. в мишень попали только два стрелка (какие – не важно);

$\boldsymbol{X} = 3$ – наступили все три события $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, т.е. все три стрелка попали в мишень.

С учётом независимости событий $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$ ищем вероятности, с которыми случайная величина $\boldsymbol{X}$ принимает указанные значения:

$$P(X = 0) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}064$$

– вероятность того, что промахнулись первый, второй и третий стрелки;

$$P(X = 1) = P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) =$$
$$= p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 =$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}368$$

– вероятность того, что в мишень попал только первый стрелок, или только второй или только третий (два других промахнулись);

$$P(X = 2) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 =$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}472$$

– вероятность того, что в мишень попали только первый и второй стрелки, или только первый и третий или только второй третий (оставшийся промахнулся);

$$P(X=3)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=p_1\cdot p_2\cdot p_3=$$
$$=0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}096$$

– вероятность того, что в мишень попали первый, второй и третий стрелки.

Таким образом, ряд распределения случайной величины ***X***:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	*0,064*	*0,368*	*0,472*	*0,096*

Для проверки находим сумму вероятностей:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}064+0{,}368+0{,}472+0{,}096=1.$$

По ряду распределения величины ***X*** находим математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i\cdot p_i = 0\cdot 0{,}064+1\cdot 0{,}368+2\cdot 0{,}472+3\cdot 0{,}096=1{,}6.$$

Дисперсия:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{4}[x_i-M(X)]^2\cdot p_i=(0-1{,}6)^2\cdot 0{,}064+(1-1{,}6)^2\cdot 0{,}368+$$
$$+(2-1{,}6)^2\cdot 0{,}472+(3-1{,}6)^2\cdot 0{,}096=0{,}56.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}56}\approx 0{,}75.$$

2.2. Записать закон распределения, найти математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратическое отклонение *σ(X)* случайной величины *X*:

Стрелок производит 10 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле ***p = 0,8***. ***X*** – число попаданий.

Решение

Возможные значения случайной величины ***X*** – 0, 1, 2, …, 10. Т.к. проводится 10 испытаний (выстрелов) и вероятность успеха (попадания) не меняется, для вычисления вероятностей, с которыми принимаются возможные значения ***m*** случайной величины, можно использовать формулу Бернулли:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Здесь ***n*** – количество испытаний, p – вероятность успеха, ***q = 1–p*** – вероятность неудачи.

Закон распределения (ряд распределения) случайной величины ***X*** имеет следующий вид:

x_i	0	1	2	…	n-1	n
p_i	q^n	$C_n^1 p\, q^{n-1}$	$C_n^2 p^2\, q^{n-2}$	…	$C_n^{n-1} p^{n-1}\, q$	p^n

Такой закон распределения называется ***биномиальным законом.***

Для биномиального распределения математическое ожидание случайной величины ***X*** – числа положительных исходов, определяется формулой:

$$M(X) = np,$$

дисперсия:

$$D(X) = npq.$$

В рассматриваемом случае количество испытаний ***n = 10***, вероятность попадания ***p = 0,8***, вероятность промаха ***q = 1 – p =1 – 0,8 = 0,2.*** Следовательно, закон распределения примет вид:

$$P(X = m) = C_{10}^{m} \cdot 0{,}8^{m} \cdot 0{,}2^{10-m}, \quad m = 0, 1, 2, ..., 10.$$

Математическое ожидание:

$$M(X) = 10 \cdot 0{,}8 = 8.$$

дисперсия:

$$D(X) = 10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6,$$

среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}6} \approx 1{,}27.$$

2.3. Найти ряд распределения, математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратическое отклонение *σ(X)* случайной величины *X*:

Стрелок производит выстрелы по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле ***p = 0,25***. ***X*** – число произведённых выстрелов.

Решение

Возможные значения случайной величины ***X*** – ***1, 2, 3, 4***,…. Вычислим соответствующие вероятности:

$$P(X = 1) = p = 0{,}25$$

– вероятность того, что был произведён только один выстрел (стрелок сразу попал в мишень);

$$P(X = 2) = q \cdot p = (1 - p) \cdot p = (1 - 0{,}25) \cdot 0{,}25 = 0{,}1875$$

– вероятность того, что было произведено два выстрела (первый раз стрелок промахнулся, второй раз – попал по мишени);

$$P(X = 3) = q^2 \cdot p = (1 - p)^2 \cdot p = (1 - 0{,}25)^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}140625$$

– вероятность того, что было произведено три выстрела (первые два выстрела стрелок промахнулся, третий раз – попал по мишени);

…

$$P(X = m) = q^{m-1} \cdot p = (1 - p)^{m-1} \cdot p = (1 - 0{,}25)^{m-1} \cdot 0{,}25 = 0{,}75^{m-1} \cdot 0{,}25$$

– вероятность того, что было произведено ***m*** выстрелов (первые ***m–1*** выстрелов стрелок промахнулся, последний, m-й раз – попал по мишени).

Таким образом, в общем виде закон распределения случайной величины будет иметь вид:

$$P(X = m) = q^{m-1} p, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

или в рассматриваемом случае

$$P(X = m) = 0{,}75^{m-1} \cdot 0{,}25, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Вероятности возможных значений случайной величины ***X*** образуют бесконечную геометрическую прогрессию. Закон распределения случайной величины в этом называется ***геометрическим законом***.

Ряд распределения случайной величины ***X***:

X	*1*	*2*	*3*	...	*m*	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{m-1}p$	...

Для геометрического распределения математическое ожидание случайной величины определяется формулой:

$$M(X) = \frac{1}{p},$$

дисперсия:

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

В рассматриваемом случае вероятность попадания ***p = 0,25***, следовательно, математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{1}{0{,}25} = 4,$$

то есть среднее число выстрелов до первого попадания равно 4.

Вероятность промаха:

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75,$$

находим дисперсию:

$$D(X) = \frac{0{,}75}{0{,}25^2} = 12,$$

среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{12} \approx 3{,}46.$$

2.4. Найти ряд распределения, математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратическое отклонение *σ(X)* случайной величины *X*:

В ящике 11 белых и 9 чёрных шаров. Наугад достали 5 шаров. ***X*** – число белых шаров среди извлечённых.

Решение

Возможные значения случайной величины ***X*** – ***0, 1, 2, 3, 4, 5***. Вычислим соответствующие вероятности, используя классическую формулу:

$$P(X = k) = \frac{m_k}{n},$$

где ***n*** – общее число возможных исходов, равное количеству вариантов выбора 5 шаров из 20 имеющихся; $\boldsymbol{m_k}$ – количество вариантов выбора ***k*** белых шаров из 11 имеющихся и ***5–k*** чёрных шаров из 9 имеющихся, т.е.

$$n = C_{20}^5 = \frac{20!}{5!(20-5)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 16 = 15504,$$

$$m_k = C_{11}^k \cdot C_9^{5-k},$$

в общем виде

$$P(X = m_k) = \frac{C_{11}^k \cdot C_9^{5-k}}{C_{20}^5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Такой закон распределения называется ***гипергеометрическим законом***, его общая формула:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где ***N*** – общее число шаров, ***M*** – число белых шаров, ***n*** – число извлечённых шаров. Случайная величина ***X*** может принимать значения от ***0*** до ***min(M, n).***

Для гипергеометрического распределения математическое ожидание случайной величины ***X*** определяется формулой:

$$M(X) = n\frac{M}{N},$$

дисперсия:

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N-1} \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{N^2}.$$

В рассматриваемом случае ***N = 11+9=20***, ***n = 5, M = 11,min(M, n) = min(11, 5)=5.*** Случайная величина ***X*** может принимать значения от 0 до 5 с вероятностями:

$$P(X=0) = \frac{C_{11}^{0}C_{20-11}^{5-0}}{C_{20}^{5}} = \frac{C_{11}^{0}C_{9}^{5}}{C_{20}^{5}} = \frac{\frac{11!}{0!\cdot(11-0)!}\cdot\frac{9!}{5!\cdot(9-5)!}}{\frac{20!}{5!\cdot(20-5)!}} = \frac{21}{2584};$$

$$P(X=1) = \frac{C_{11}^{1}C_{20-11}^{5-1}}{C_{20}^{5}} = \frac{C_{11}^{1}C_{9}^{4}}{C_{20}^{5}} = \frac{\frac{11!}{1!\cdot(11-1)!}\cdot\frac{9!}{4!\cdot(9-4)!}}{\frac{20!}{5!\cdot(20-5)!}} = \frac{231}{2584};$$

$$P(X=2) = \frac{C_{11}^{2}C_{20-11}^{5-2}}{C_{20}^{5}} = \frac{C_{11}^{2}C_{9}^{3}}{C_{20}^{5}} = \frac{\frac{11!}{2!\cdot(11-2)!}\cdot\frac{9!}{3!\cdot(9-3)!}}{\frac{20!}{5!\cdot(20-5)!}} = \frac{770}{2584} = \frac{385}{1292};$$

$$P(X=3) = \frac{C_{11}^{3}C_{20-11}^{5-3}}{C_{20}^{5}} = \frac{C_{11}^{3}C_{9}^{2}}{C_{20}^{5}} = \frac{\frac{11!}{3!\cdot(11-3)!}\cdot\frac{9!}{2!\cdot(9-2)!}}{\frac{20!}{5!\cdot(20-5)!}} = \frac{990}{2584} = \frac{495}{1292};$$

$$P(X=4) = \frac{C_{11}^{4}C_{20-11}^{5-4}}{C_{20}^{5}} = \frac{C_{11}^{4}C_{9}^{1}}{C_{20}^{5}} = \frac{\frac{11!}{4!\cdot(11-4)!}\cdot\frac{9!}{1!\cdot(9-1)!}}{\frac{20!}{5!\cdot(20-5)!}} = \frac{495}{2584};$$

$$P(X=5)=\frac{C_{11}^{5}C_{20-11}^{5-5}}{C_{20}^{5}}=\frac{C_{11}^{5}C_{9}^{0}}{C_{20}^{5}}=\frac{\dfrac{11!}{5!\cdot(11-5)!}\cdot\dfrac{9!}{0!\cdot(9-0)!}}{\dfrac{20!}{5!\cdot(20-5)!}}=\frac{77}{2584}.$$

Проверяем сумму вероятностей всех значений случайной величины:

$$\sum_{i=1}^{6}p_i=\frac{21}{2584}+\frac{231}{2584}+\frac{770}{2584}+\frac{990}{2584}+\frac{495}{2584}+\frac{77}{2584}=\frac{2584}{2584}=1.$$

Ряд распределения случайной величины ***X***:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
P	$\frac{21}{2584}$	$\frac{231}{2584}$	$\frac{385}{1292}$	$\frac{495}{1292}$	$\frac{495}{2584}$	$\frac{77}{2584}$

По ряду распределения находим математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i\cdot p_i=0\cdot\frac{21}{2584}+1\cdot\frac{231}{2584}+2\cdot\frac{385}{1292}+3\cdot\frac{495}{1292}+4\cdot\frac{495}{2584}+$$

$$+5\cdot\frac{77}{2584}=\frac{231+1540+2970+1980+385}{2584}=\frac{7106}{2584}=\frac{11}{4}=2{,}75,$$

по формуле для математического ожидания случайной величины, распределённой по гипергеометрическому закону получаем тот же результат:

$$M(X)=n\frac{M}{N}=5\cdot\frac{11}{20}=2{,}75.$$

Дисперсия:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{6}[x_i-M(X)]^2\cdot p_i=(0-2{,}75)^2\cdot\frac{21}{2584}+(1-2{,}75)^2\cdot\frac{231}{2584}+$$

$$+(2-2{,}75)^2\cdot\frac{385}{1292}+(3-2{,}75)^2\cdot\frac{495}{1292}+(4-2{,}75)^2\cdot\frac{495}{2584}+$$

$$+(5-2{,}75)^2\cdot\frac{77}{2584}=\frac{2524{,}5}{2584}=\frac{297}{304};$$

дисперсия по формуле:

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N-1} \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{N^2} = 5 \cdot \frac{11}{20-1} \cdot \frac{(20-11)(20-5)}{20^2} = \frac{297}{304}.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{297}{304}} \approx 0{,}988.$$

2.5. Найти ряд распределения, математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратическое отклонение *σ(X)* случайной величины *X*:

Стрелок имеет 5 патронов и стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле ***p = 0,25***. ***X*** – число произведённых выстрелов.

Решение

Случайная величина ***X*** может принимать значения от ***1*** до ***5***. В данном случае вероятность промаха ***q = 1 – p = 1 – 0,25 = 0,75***. Найдём вероятности, соответствующие значениям случайной величины:

$$P(X = 1) = p = 0{,}25$$

– вероятность того, что был произведён только один выстрел (стрелок сразу попал в мишень);

$$P(X = 2) = q \cdot p = 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}1875$$

– вероятность того, что было произведено два выстрела (первый раз стрелок промахнулся, второй раз – попал по мишени);

$$P(X = 3) = q^2 \cdot p = 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}140625$$

– вероятность того, что было произведено три выстрела (первые два выстрела стрелок промахнулся, третий раз – попал по мишени);

$$P(X = 4) = q^3 \cdot p = 0{,}75^3 \cdot 0{,}25 = 0{,}10546875$$

– вероятность того, что было произведено четыре выстрела (первые три выстрела стрелок промахнулся, третий раз – попал по мишени);

$$P(X = 5) = q^4 \cdot p + q^5 = 0{,}75^4 \cdot 0{,}25 + 0{,}75^5 =$$
$$0{,}0791015625 + 0{,}2373046875 = 0{,}31640625$$

– вероятность того, что было произведено пять выстрелов; значение вероятности ***P(X = 5)*** равно сумме вероятности того, что стрелок четыре раза промахнулся и пятый раз попадёт в мишень, и вероятности того, что стрелок промахнётся пять раз.

Найдём сумму полученных вероятностей:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}25 + 0{,}1875 + 0{,}140625 + 0{,}10546875 + 0{,}31640625 = 1.$$

Ряд распределения случайной величины ***X***:

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
P	*0,25*	*0,1875*	*0,140625*	*0,10546875*	*0,31640625*

По ряду распределения находим математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}1875 + 3 \cdot 0{,}140625 + 4 \cdot 0{,}10546875 +$$
$$+ 5 \cdot 0{,}31640625 = 3{,}05078125.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{5} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i = (1 - 3{,}05078125)^2 \cdot 0{,}25 +$$
$$+ (2 - 3{,}05078125)^2 \cdot 0{,}1875 + (3 - 3{,}05078125)^2 \cdot 0{,}140625 +$$
$$(4 - 3{,}05078125)^2 \cdot 0{,}10546875 + (5 - 3{,}05078125)^2 \cdot 0{,}31640625 =$$
$$= 2{,}5560150146484375.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{2{,}5560150146484375} \approx 1{,}599.$$

2.6. Найти ряд распределения, математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратическое отклонение *σ(X)* случайной величины *X*:

Стрелок производит выстрелы по мишени до третьего попадания. Вероятность попадания при одном выстреле ***p = 0,25***. ***X*** – число произведённых выстрелов.

Решение

Случайная величина ***X*** может принимать значения ***3, 4, 5, 6***… Вычислим соответствующие вероятности:

$$P(X=3)=p^3=0{,}25^3=0{,}015625$$

– вероятность того, что стрелок сразу попал по мишени три раза подряд;

$$P(X=4)=C_3^2\cdot p^2\cdot q\cdot p=3\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25=0{,}03515625$$

– вероятность того, что стрелок в первых трёх выстрелах совершил два попадания и один промах, при четвёртом выстреле – попал по мишени;

$$P(X=5)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^2\cdot p=6\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^2\cdot 0{,}25=0{,}052734375$$

– вероятность того, что стрелок в первых четырёх выстрелах совершил два попадания и два промах, при пятом выстреле – попал по мишени; и т.д.

Таким образом, закон распределения случайной величины ***X*** в общем виде:

$$P(X=m)=C_{m-1}^2\cdot p^2\cdot q^{m-3}\cdot p=C_{m-1}^2\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^{m-3}\cdot 0{,}25=$$
$$=C_{m-1}^2\cdot 0{,}25^3\cdot 0{,}75^{m-3}.$$

– вероятность того, что стрелок в первых ***m–1*** выстрелах совершил два попадания и ***m–3*** промаха, при ***m***-м выстреле – попал по мишени.

Для вычисления характеристик случайной величины ***X*** воспользуемся следующими соображениями. В случаях, когда проводятся повторные независимые испытания до первого успеха, случайная величина распределена по ***геометрическому закону***. Случайная величина ***X**** – количество испытаний до первого успеха, – может принимать значения от ***1*** до ∞ с вероятностями:

$$P(X = m) = q^{m-1} p$$

– одно попадание и ***m-1*** промах.

Её математическое ожидание:

$$M(X^*) = \frac{1}{p},$$

дисперсия:

$$D(X^*) = \frac{q}{p^2}.$$

Если испытания проводятся до ***k***-того успеха, то случайная величина ***X*** в данном случае представляет собой сумму независимых случайных величин $\boldsymbol{X_i^*}$, геометрически распределённых, с одинаковыми математическим ожиданием $\frac{1}{p}$ и дисперсией $\frac{q}{p^2}$. По свойству математического ожидания для суммы случайных величин:

$$M(X) = M(X_1^* + X_2^* + ... + X_k^*) = M(X_1^*) + M(X_2^*) + ... + M(X_k^*) =$$
$$= k \cdot M(X_i^*) = k \cdot \frac{1}{p} = \frac{k}{p}.$$

В рассматриваемом случае количество успехов ***k*** = 3, вероятность попадания ***p = 0,25***, следовательно, математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{3}{0{,}25} = 12,$$

то есть до первых трёх попаданий стрелок в среднем произведёт 12 выстрелов.

По свойству дисперсии для суммы независимых случайных величин:

$$D(X_1^* + X_2^* + ... + X_k^*) = D(X_1^*) + D(X_2^*) + ... + D(X_k^*) =$$
$$= k \cdot D(X_i^*) = k \cdot \frac{q}{p^2} = \frac{k \cdot q}{p^2}.$$

В нашем случае

$$D(X) = \frac{3 \cdot 0{,}75}{0{,}25^2} = 36,$$

среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{36} = 6.$$

Литература

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., Высшая школа, 2004. – 479 с.

2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., Высшая школа, 2004. – 404 с.

3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

4. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

Оглавление

Введение..... 1

1. Закон распределения дискретной случайной величины и её числовые характеристики..... 2

2. Виды распределения дискретной случайной величины и их числовые характеристики 17

Литература..... 33